第 50 卷 第 1 期 中山大学学报（自然科学版） Vol. 50 No. 1
2011 年 1 月 ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM UNIVERSITATIS SUNYATSENI Jan. 2011

带转移机制且股票价格服从几何 Levy 过程的连续时间均值－方差投资组合选择*

伍慧玲[1]，李仲飞[2]
（1. 中山大学数学与计算科学学院，广东 广州 510275；
2. 中山大学岭南（大学）学院，广东 广州 510275）

摘　要：研究了带转移机制且股票价格服从几何 Levy 过程的均值－方差投资组合选择模型。用一个连续时间平稳马氏链表示市场所处的状态，文中主要参数，比如资产收益、Levy 测度等均依赖于所处的市场状态。分析了最优投资组合策略的存在性，用动态规划方法得到了最优投资组合策略、最优目标函数和有效前沿。

关键词：转移机制；几何 Levy 过程；均值－方差模型；有效前沿
中图分类号：O224　　**文献标志码：**A　　**文章编号：**0529－6579（2011）01－0031－04

Continuous-time Mean-variance Optimal Portfolio Selection with Regime Switching when Stock Prices Follow Geometric Levy Processes

WU Huiling[1], *LI Zhongfei*[2]
(1. School of Mathematics and Computational Science, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China;
2. Lingnan (University) College, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: A continuous-time mean-variance portfolio selection model when stock prices follow geometric Levy processes is investigated. The primal parameters, such as the interest rate of riskless asset and the Levy measure, depend on the market states modulated by a continuous-time Markov chain. The existence of optimal solutions is analyzed, and the optimal strategy and the efficient frontier of the model in closed-form are derived by dynamic programming.

Key words: regime switching; geometric Levy process; mean-variance model; efficient frontier

1952 年，Markowitz[1]提出了单期的均值－方差模型，为现代投资组合选择问题奠定了理论基础并吸引了大量的学者对此进行推广和研究[2-5]。最近几年，带转移机制的连续时间均值－方差模型成为了人们的一个研究热点，在带转移机制的模型里，主要的参数，比如无风险利率，股票的收益率和扩散系数等均与所处的市场状态有关。对于带转移机制的均值－方差模型的研究，有兴趣的读者可以参考文献［6－9］。然而现有的带转移机制的均值－方差模型总是假设股票的价格服从几何布朗运动，具有连续的路径。但在现实中，股票的价格往往会发生跳跃，有兴趣的读者也可参考文献［10－11］。总的来说，对股票价格带跳的均值－方差模型的研究甚少。出于现实的考虑，本文研究了股票价格服从几何 Levy 过程的均值－方差模型，其中漂移率、波动率和 Levy 测度均依赖于所处的市场状态。据我们所知，目前还没有文献做过这方面的研究。

* 收稿日期：2010－03－09
基金项目：国家杰出青年科学基金资助项目（70825002）；国家 973 计划资助项目（2007CB814902）
作者简介：伍慧玲（1978 年生），女，博士生，讲师；通讯作者：李仲飞；E-mail：lnslzf@mail.sysu.edu.cn

1 模型描述

令（Ω, F, P）是一个完备概率空间，$\{W(t)=(W_1(t),\cdots,W_n(t))^{\mathrm{T}},t\geqslant 0\}$ 是定义在（Ω, F, P）上的一个 n 维标准布朗运动。假设市场上有 $n+1$ 个资产，资产在 t 时刻的收益与当时所处的市场状态 $a(t)$ 有关。其中 $\{a(t),t\geqslant 0\}$ 是定义在（Ω, F, P）上的连续时间平稳马氏过程且与 $\{W(t),t\geqslant 0\}$ 相互独立，状态空间为 $S=\{1,2,\cdots,L\}$，转移率矩阵为 $Q=(q_{ij})$。第0个资产为无风险资产，其价格过程是 $\mathrm{d}P_0(t)=P_0(t)r_0(t,a(t))\mathrm{d}t$，初始化条件 $P_0(0)=P_0$。第 $k(k=1,\cdots,n)$ 个风险资产（股票）的价格服从几何 Levy 过程，即

$$\mathrm{d}P_k(t)=P_k(t)[\mu_k(t,a(t))\mathrm{d}t+\sum_{l=1}^{n}\sigma_{kl}(t,a(t))\mathrm{d}W_l(t)+\int_{-1}^{+\infty}z\tilde{N}_k(\mathrm{d}t,\mathrm{d}z)]$$

初始化条件 $P_K(0)=P_K>0$

其中 $\tilde{N}_k(\mathrm{d}t,\mathrm{d}z)=N_k(\mathrm{d}t,\mathrm{d}z)-\eta_k^i(\mathrm{d}z)\mathrm{d}t$；$N_k(\mathrm{d}t,\mathrm{d}z)$ 表示此 Levy 过程在 $\mathrm{d}t$ 时间内，跳跃宽度在 $\mathrm{d}z$ 范围内的跳跃次数，我们假设 $N_k(\mathrm{d}t,\mathrm{d}z)$ 与 $\mathrm{d}t$ 时间内市场所处的状态有关；$\eta_k^i(\mathrm{d}z)\,\mathrm{d}t$ 表示当 $\mathrm{d}t$ 时间内的市场状态为 i 时，跳跃宽度在 $\mathrm{d}z$ 范围内的平均跳跃次数，即 $\eta_k^i(\mathrm{d}z)\mathrm{d}t=E[N_k(\mathrm{d}t,\mathrm{d}z)]$。我们还假设当给定市场状态时，$N_k(\mathrm{d}t,\mathrm{d}z)(k=1,2,\cdots,n)$ 是相互独立过程，且市场状态发生跳跃的时间与每一个 Levy 过程发生跳跃的时间都是相互独立。假设投资者从0时刻进入市场进行投资，拥有初始财富 x_0，面临的市场初始状态是 i_0，在 t 时刻投资在第 k 个风险资产上的金额 $u_k(t)$ 是。令

$$u(t)=(u_1(t),u_2(t),\cdots,u_n(t))^{\mathrm{T}},$$

$$\tilde{\mu}(t,i)=(\mu_1(t,i)-r_0(t,i),\mu_2(t,i)-r_0(t,i),\cdots,\mu_n(t,i)-r_0(t,i))^{\mathrm{T}}\neq 0,$$

$$\bar{\mu}(t,i)=\left(\tilde{\mu}_1(t,i)-\int_{-1}^{+\infty}z\eta_1^i(\mathrm{d}z),\cdots,\tilde{\mu}_n(t,i)-\int_{-1}^{+\infty}z\eta_n^i(\mathrm{d}z)\right)^{\mathrm{T}}$$

和 $\sigma(t,i)=(\sigma_{kl}(t,i))_{k,l=1,2,\cdots,n}$。

则在 t 时刻的财富 $X(t)$ 满足

$$\mathrm{d}X(t)=[r_0(t,a(t))X(t)+u(t)^{\mathrm{T}}\bar{\mu}(t,a(t))]\mathrm{d}t+u(t)^{\mathrm{T}}\sigma(t,a(t))\mathrm{d}W(t)+\sum_{k=1}^{n}u_k(t)\int_{-1}^{+\infty}zN_k(\mathrm{d}t,\mathrm{d}z)\qquad(1)$$

假设投资者的目标是求解优化问题

$$P(d)\quad \min_{\{u(t);0\leqslant t\leqslant T\}}E[X_T-d]^2\ \text{s.t.}\ E(X_T)=d$$

其中 T 是投资者考虑的投资期限，d 是投资者设定的预期终端财富目标。

我们先用拉格朗日法，引入拉格朗日乘子 λ，来解决无约束问题

$$PL(\lambda,d)\quad \min_{\{u(t);0\leqslant t\leqslant T\}}E\{[X_T-d]^2+2\lambda[X_T-d]\}=\min_{\{u(t);0\leqslant t\leqslant T\}}E[X_T+\lambda-d]^2-\lambda^2$$

上述两个问题的最优目标函数及最优策略的关系由下面的引理1给出。

引理1 假设 PL（λ, d）的最优目标函数和最优策略分别为 $g(\lambda)$ 和 $\hat{u}(t)$，则 $P(d)$ 的最优目标函数是 $\sup\limits_{\lambda\in\mathbb{R}}g(\lambda)$，最优策略是 $u^*(t)=\hat{u}(t)|_{\lambda=\lambda^*}$，其中 $\lambda^*=\operatorname{argsup}\limits_{\lambda\in\mathbb{R}}g(\lambda)$。

注意到，求解 $PL(\lambda,d)$ 等价于求解问题

$$\overline{PL}(\lambda,d)\quad \min_{\{u(t);0\leqslant t\leqslant T\}}E[X_T+\lambda-d]^2$$

因为它们的最优策略相同且两者的最优目标函数只相差一个常数。为此，在下面的第2节中，我们先来求解问题 $\overline{PL}(\lambda,d)$ 的最优策略和最优值函数。

2 问题 $\overline{PL}(\lambda,d)$ 的最优值函数与最优策略

令

$$J(t,x,i)=\min_{\{u(s);t\leqslant s\leqslant T\}}E[(X_T+\lambda-d)^2\mid a(t)=i,X(t)=x]\qquad(2)$$

为问题 $\overline{PL}(\lambda,d)$ 的最优值函数。为了得到想要的结果，我们引出引理2和给出问题 $\overline{PL}(\lambda,d)$ 的核验定理。

引理2[7] 若 $F(\cdot,i)(i\in S)$ 是微分方程 $\dot{F}(t,i)=a(t,i)F(t,i)-\sum\limits_{j\neq i}q_{ij}F(t,j)$，边界条件 $F(T,i)=1$ 的解；$K(\cdot,i)(i\in S)$ 是微分方程 $\dot{K}(t,i)=b(t,i)K(t,i)-c(t,i)-\sum\limits_{j\neq i}q_{ij}K(t,j)$，边界条件 $K(T,i)=0$ 的解，其中 $a(t,i),b(t,i)\in\mathbb{R},c(t,i)>0,t\in[0,T]$。则 $F(t,i)>0,K(t,i)>0,t\in[0,T]$。

定理1[12]（核验定理）

定义算子

$$A^u w(t,x,i)=w_t+\frac{1}{2}w_{xx}u(t)^{\mathrm{T}}\sigma(t,i)\sigma(t,i)^{\mathrm{T}}u(t)+w_x[r_0(t,i)x+\bar{\mu}(t,i)^{\mathrm{T}}u(t)]+\sum_{j\in S}q_{ij}w(t,x,j)+\sum_{k=1}^{n}\int_{-1}^{+\infty}[w(t,x+u_k(t)z,i)-w(t,x,i)]\eta_k^i(\mathrm{d}z)$$

令 $w(t,x,i)\in C^{1,2}$，$i\in S$ 是下面方程

$$\min_{u(t)}\{A^u w(t,x,i)\}=0,\quad w(T,x,i)=(x+\lambda-d)^2\qquad(3)$$

的一个解，则 $w(t,x,i) \leqslant J(t,x,i)$；若存在 $\hat{u}(t) \in \arg\min\{A^u w(t,\hat{X}(t),i)\}$，其中 $\hat{X}(t)$ 是当 $u(t) = \hat{u}(t)$ 时(1)的解，则 $w(t,x,i) = J(t,x,i)$ 且 $\hat{u}(t)$ 是问题 $\overline{PL}(\lambda,d)$ 的最优策略。现在我们猜测（3）的解的形式是

$$w(t,x,i) = P(t,i)x^2 + 2(\lambda - d)H(t,i)x + (\lambda - d)^2 G(t,i)$$

则当 $P(t,i) > 0$ 时，最优策略 $\hat{u}(t) = \arg\min\limits_{u(t)}\{A^u w(t,x,i)\}$ 为

$$\hat{u}(t) = -\left[\sigma(t,i)\sigma(t,i)^{\mathrm{T}} + \mathrm{diag}\left(\int_{-1}^{+\infty} z^2 \eta_k^i(dz)\right)\right]^{-1} \cdot \left(x + (\lambda - d)\frac{H(t,i)}{P(t,i)}\right)\tilde{\mu}(t,i) \tag{4}$$

再将（4）代回（3），整理出关于 $x(t)$ 的二次多项式，最后令 $x^2(t)$，$x(t)$ 的系数和常数项为 0，得到 $P(t,i)$，$H(t,i)$，$G(t,i)$ 分别满足下列微分方程

$$\dot{P}(t,i) = (\zeta(t,i) - 2r_0(t,i) - q_{ii})P(t,i) - \sum_{j\neq i} q_{ij}P(t,j),\ P(T,i) = 1 \tag{5}$$

$$\dot{H}(t,t) = (\zeta(t,i) - r_0(t,i) - q_{ii})H(t,i) - \sum_{j\neq i} q_{ij}H(t,j),\ H(T,i) = 1 \tag{6}$$

$$\dot{G}(t,i) = -q_{ii}G(t,i) + \zeta(t,i)\frac{H^2(t,i)}{P(t,i)} - \sum_{j\neq i} q_{ij}G(t,j),\ G(T,i) = 1 \tag{7}$$

其中，$\zeta(t,i) = \tilde{\mu}(t,i)^{\mathrm{T}}\left[\sigma(t,i)\sigma(t,i)^{\mathrm{T}} + \mathrm{diag}\left(\int_{-1}^{+\infty} z^2\eta_k^i(\mathrm{d}z)\right)\right]^{-1}\tilde{\mu}(t,i)$

上述三个微分方程均是线性方程，当系数一致有界时，方程的解存在且唯一。从（5）－（7），可知 $P(t,i)$，$H(t,i)$，$G(t,i)$ 均与 λ 无关，且由引理 2 可知 $P(t,i) > 0$ 成立。根据定理 1，得到问题 $PL(\lambda,d)$ 与 $\overline{PL}(\lambda,d)$ 的最优策略是式子（4），$\overline{PL}(\lambda,d)$ 的最优目标函数为

$$J(0,x_0,i_0) = P(0,i_0)(x_0)^2 + 2(\lambda - d)H(0,i_0)x_0 + (\lambda - d)^2G(0,i_0) \tag{8}$$

问题 $PL(\lambda,d)$ 最优目标函数为

$$g(\lambda) = P(0,i_0)(x_0)^2 + 2(\lambda - d)H(0,i_0)x_0 + (\lambda - d)^2G(0,i_0) - \lambda^2 \tag{9}$$

3　问题 $P(d)$ 的最优目标函数与最优策略

有了上述结论，我们可利用引理 1 来求解问题 $P(d)$ 的最优策路和最优目标函数。为此，我们先来证明 $\sup\limits_{\lambda\in\mathbb{R}} g(\lambda)$ 的存在性。

引理 3　$0 < G(0,i_0) < 1$，$P(0,i_0) - \dfrac{H^2(0,i_0)}{G(0,i_0)} \geq 0$。

证明　从 $J(t,x,i)$ 的定义（式子（2）），易知 $J(t,x,i) \geqslant 0$，$t \in [0,T]$，而不管 $\lambda \in \mathbb{R}$ 取值如何。若 $G(0,i_0) \leqslant 0$，则从（8）可知，当 λ 取值适当时，可使得 $J(0,x_0,i_0) < 0$，矛盾。同理，当 $\tilde{\lambda} = d - \dfrac{H(0,i_0)x_0}{G(0,i_0)}$ 时，得到 $J(0,x_0,i_0)\mid_{\tilde{\lambda}} \geqslant 0$，即得 $P(0,i_0) - \dfrac{H^2(0,i_0)}{G(0,i_0)} \geqslant 0$。

现在来证明 $G(0,i_0) < 1$。令 $\overline{G}(t,i) = 1 - G(t,i)$，由（7）可得 $\overline{G}(t,i)$ 满足的方程是

$$\dot{\overline{G}}(t,i) = -q_{ii}\overline{G}(t,i) - \zeta(t,i)\frac{H^2(t,i)}{P(t,i)} - \sum_{j\neq i} q_{ij}\overline{G}(t,i)$$

边界条件为 $\overline{G}(T,i) = 0$

由 $\zeta(t,i)\dfrac{H^2(t,i)}{P(t,i)} > 0$ 和引理 2 可得 $\overline{G}(t,i) > 0$，从而 $G(t,i) < 1$，即得 $G(0,i_0) < 1$。证毕。

由引理 3，可知 $\sup\limits_{\lambda\in\mathbb{R}} g(\lambda)$ 是存在的。根据引理 1，对（9）关于 λ 求导且令导数为 0，得

$$\lambda^* = \frac{H(0,i_0)x_0 - G(0,i_0)d}{1 - G(0,i_0)} \tag{10}$$

此时原问题 $P(d)$ 的最优策略是

$$u^*(t) = -\left[\sigma(t,i)\sigma(t,i)^{\mathrm{T}} + \mathrm{diag}\left(\int_{-1}^{+\infty} z^2\eta_k^i(\mathrm{d}z)\right)\right]^{-1} \cdot \left(x + \frac{(\lambda^* - d)H(t,i)}{P(t,i)}\right)\tilde{\mu}(t,i)$$

将（10）代入（9）简化后可得问题 $P(d)$ 的最优目标函数和有效前沿为

$$\sup_{\lambda} g(\lambda) = \frac{G(0,i_0)}{1 - G(0,i_0)}\left[d - \frac{H(0,i_0)x_0}{G(0,i_0)}\right]^2 + \left[P(0,i_0) - \frac{H^2(0,i_0)}{G(0,i_0)}\right](x_0)^2$$

参考文献：

[1]　MARKOWITZ H. Portfolio selection [J]. The Journal of Finance, 1952, 7: 77－91.

[2]　LI D, NG W L. Optimal dynamic portfolio selection: multiperiod mean-variance formulation [J]. Mathematical Finance, 2000, 10: 387－406.

（下转第 38 页）

$$\begin{cases}\varphi(\theta) = -\sqrt{8\Delta}\operatorname{sech}\sqrt{2}\theta + 2\sqrt{\Delta} \\ \xi(\theta) \pm 2\sqrt{2}\theta \pm \frac{1}{\sqrt{\Delta}}\tanh(\sqrt{2}\theta) + \xi_0\end{cases} (\theta\text{为参数}) \quad (18)$$

又由于行波系统（6）存在奇异直线 $\varphi=0$，使得该行波系统不连续，成为奇异行波系统。受奇异直线 $\varphi=0$ 的影响，应有 $\varphi(\theta)<0$ 或者 $\varphi(\theta)>0$，取 $\theta_0=\frac{1}{\sqrt{2}}\text{Arsech}\sqrt{2}$，由（17）式表示的环状孤波解由 $\theta\in(-\infty,\theta_0)$，$\theta\in(\theta_0,+\infty)$，$\theta\in(-\theta_0,\theta_0)$ 的三个破缺行波解组成（如图3）。

参考文献：

[1] KONNO K, ICHIKAWA Y H, WADATI M. A loop soliton propagating along a stretched rope [J]. J Phys Soc Japan, 1981, 50(3): 1025-1026.

[2] VAKHNENKO V O, PARKES E J. The two loop soliton solution of the Vakhnenko equation [J]. Nonlinearity, 1998, 11: 1457-1464.

[3] PARKES E J. Explicit solution of the reduced Ostrovsky equation [J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2007, 37(3): 602-610.

[4] PARKES E J. Some periodic and solitary traveling-wave solution of the short-pulse equation [J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2008, 38(1): 154-159.

[5] LI J B. Dynamical understanding of loop soliton solution for several nonlinear wave equations [J]. Science in China: A, 2007, 50(6): 773-785.

[6] LI J B. Family of nonlinear wave equations which yield loop solutions and solitary wave solutions [J]. Discrete and Continuous Dynamical Systems, 2009, 24(3): 897-907.

[7] 李继彬. 两非线性波方程真圈解的存在性和破缺性[J]. 应用数学和力学, 2009, 30(5): 505-514.

[8] LI J B, DAI H H. On the study of singular nonlinear traveling wave equations: dynamical approach[M]. Beijing: Science Press, 2007.

[9] 刘正荣, Ali Mohammed Kayed. 分支方法与广义CH方程的显式周期波解[J]. 华南理工大学学报:自然科学版, 2007, 35(10): 227-232.

[10] 郭柏灵, 刘正荣. CH-r方程的尖波解[J]. 中国科学:A辑, 2003, 33(4): 325-337.

[11] KADOMTSEV B B, PETVIASHVILI V I. On the stability of solitary waves in weakly dispersive media [J]. Sov Phys Dokl, 1970, 15: 539-541.

[12] 郭柏灵. 非线性演化方程[M]. 上海: 上海科技教育出版社, 1995.

（上接第33页）

[3] ZHOU X Y, LI D. Continuous-time mean-variance portfolio selection: a stochastic LQ framework [J]. Applied Mathematics and Optimization, 2000, 42: 19-33.

[4] CHIU M C, LI D. Asset and liability management under a continuous-time mean-variance optimization framework [J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2006, 39: 330-355.

[5] XIE S X, LI Z F, WANG S Y. Continuous-time portfolio selection with liability: mean-variance model and stochastic LQ approach [J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2008, 42: 943-953.

[6] YIN G, ZHOU X Y. Markowitz's mean-variance portfolio selection with regime switching: from discrete-time to their continuous-time limits [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2004, 49: 349-360.

[7] ZHOU X Y, YIN G. Markowitz's mean-variance portfolio selection with regime switching: a continuous-time model [J]. SIAM J Control OPTIM, 2003, 42(4): 1466-1482.

[8] CHEN P, YANG H L, YIN G. Markowitz's mean-variance asset-liability management with regime switching: a continuous-time model [J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2008, 43: 456-465.

[9] XIE S X. Continuous-time mean-variance portfolio selection with liability and regime switching [J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2009, 45: 148-155.

[10] ØKSENDAL B, SULEM A. Applied stochastic control of jump diffusions [M]. New York: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2005.

[11] GUO W J, XU C. Optimal portfolio selection when stock prices follow a jump diffusion process [J]. Mathematical Methods of Operations Research, 2004, 60(3): 485-496.

[12] FLEMING W H, SONER H M. Controlled Markov processes and viscosity solutions [M]. New York: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1993: 163-164.